O Que é Tão Interessante na Matemática (para um Filósofo)?*

Stewart Shapiro♣

1. Atracção de Opostos?

Ao longo da história, os filósofos têm tido uma atracção particular pela matemática. Dizia-se que na entrada da Academia de Platão estava escrito: "não deixem entrar alguém que seja ignorante em geometria". De acordo com a filosofia platónica, a matemática é a formação apropriada para compreender o Universo, tal como é, por oposição ao que aparenta ser. Platão chegou às suas ideias reflectindo acerca do lugar da matemática na obtenção de conhecimento racional. Anteriormente ao processo geral de compartimentação das instituições académicas, muitos matemáticos eram também filósofos. Facilmente nos recordamos dos nomes de René Descartes, Gottfried Wilhelm Leibinz e Blaise Pascal, e mais próximos do presente existem Bernard Bolzano, Bertrand Russell, Alfred North Whitehead, David Hilbert, Gottlob Frege, Alonzo Church, Kurt Gödel e Alfred Tarski. Até recentemente, quase todos os filósofos estavam cientes do estado da matemática e tinham um interesse profissional nela.

O racionalismo é uma escola filosófica de longa data que pode ser caracterizada como uma tentativa de estender a metodologia da matemática a todo o conhecimento. Os racionalistas ficaram impressionados com o aparente inabalável fundamento da matemática e a sua sustentação na racionalidade pura. Eles tentaram colocar todo o conhecimento em pé de igualdade: a ciência, a ética e áreas similares também deviam prosseguir ao abrigo de demonstrações rigorosas das suas proposições, unicamente através da razão. O racionalismo remonta a Platão e, durante o século dezassete e início do século dezoito, prosperou nos escritos de Descartes, Baruch Spinoza e Leibniz. A maior oposição ao racionalismo surge do empirismo, a concepção de que a experiência dos sentidos, e não a razão pura, é a fonte do conhecimento. Esta concepção remonta a Aristóteles e foi desenvolvida pelos escritores britânicos como John Locke, George Berkeley, David Hume e John Stuart Mill. A tradição empirista foi transmitida aos positivistas lógicos e ao Círculo de Viena, incluindo Moritz Schlick, Rudolf Carnap e A. J. Ayer, e está hoje viva no trabalho de Bas van Fraassen e W. V. O. Quine. Dado que o conhecimento matemático parece ser fundamentado na *demonstração*, e não na observação, a matemática é, aparentemente, um contra-exemplo à tese empirista principal. Na verdade, por vezes, a matemática é erigida como um paradigma de conhecimento *a priori* – conhecimento prévio e independente da experiência.

Virtualmente, todo o empirista considerou a questão da matemática mais seriamente, e alguns deles percorreram caminhos longos para a acomodar, por vezes deformando-a de tal modo que era impossível reconhecê-la (ver Parsons 1983: ensaio 1).

Hoje constatamos uma vasta especialização em todas as áreas da academia. Os matemáticos e os filósofos, correntemente, têm dificuldades em entender a investigação dos colegas dos próprios departamentos. Algebristas não conseguem seguir os desenvolvimentos em análise; o trabalho em filosofia da física é incompreensível para a maior parte dos eticistas. Consequentemente, não há uma ligação muito directa e cônscia entre a matemática e a filosofia correntes. No entanto, a matemática não está afastada dos interesses de campos filosóficos como a epistemologia, a metafísica, a lógica, a ciência cognitiva, a filosofia da linguagem e a filosofia da ciência natural e social. Por sua vez, a filosofia não está afastada dos principais interesses de campos matemáticos como a lógica, a teoria dos conjuntos, a teoria das categorias, a computabilidade e mesmo a análise ou a geometria. Mundialmente, a lógica é ensinada em ambos os departamentos – matemática e filosofia.

Às vezes, para o melhor e para o pior, muitas técnicas e instrumentos usados na filosofia contemporânea foram desenvolvidos e aperfeiçoados com a matemática, e apenas a matemática, em vista. A lógica desenvolveu-se num campo próspero através de matemáticos algebristas como George Boole, Ernst Schröder, Bolzano, Frege e Hilbert. Estes matemáticos centraram-se na lógica e nos fundamentos da *matemática*. Da lógica herdamos modelos teóricos semânticos e destes herdamos análises, em termos de mundos possíveis, do discurso modal e epistémico. Não é muito exagerado afirmar que a semântica e os sistemas dedutivos da lógica formal têm-se tornado a *lingua franca* em todos os assuntos e interesses da filosofia contemporânea[1]. Num certo sentido, muita da filosofia analítica é uma tentativa para alargar o êxito da lógica, nas linguagens da matemática, à linguagem natural e à epistemologia geral. Isto deve ser uma herança do racionalismo.

Há várias razões para a conexão entre a matemática e a filosofia. Ambas estão entre as primeiras tentativas intelectuais para compreender o mundo à nossa volta e ambas nasceram na antiga Grécia ou, então, sofreram profundas transformações (dependendo do que conta como sendo matemática e do que conta como sendo filosofia). Segundo, e mais importante, a matemática é um caso de estudo importante para o filósofo. Muitos assuntos da agenda da filosofia contemporânea têm formulações notavelmente precisas quando centradas na matemática, como em assuntos de epistemologia, ontologia, semântica ou lógica. Por exemplo, temos observado que há êxito na lógica quando o raciocínio matemático se torna o centro da investigação. Os filósofos estão interessados em questões de referência: o que é para um item léxico sustentar ou representar um objecto? Como conseguimos ligar um nome àquilo de que é nome? As linguagens da matemática permitem uma clarificação destas questões. Os filósofos também estão interessados em matérias de normatividade: o que significa uma pessoa *A* estar obrigada a fazer uma acção *B*? O que queremos dizer quando afirmamos que alguém deve fazer algo, como dar esmola? A matemática e a lógica matemática proporcionam, no mínimo, um importante e, possivelmente, simples argumento a favor da normatividade: a lógica é normativa se alguma coisa o é. Em que sentido estamos obrigados a seguir os cânones do raciocínio correcto quando fazemos matemática? Platão aconselhou os seus estudantes a começar com casos relativamente simples e directos.[2] Talvez a normatividade da lógica matemática seja um caso desse género.

Uma terceira razão para a conexão entre a matemática e a filosofia reside na epistemologia – o estudo do conhecimento. A matemática é vitalmente importante por causa do seu papel central em, virtualmente, toda a descoberta científica para compreensão do mundo material. Consideremos, por exemplo, a matemática pressuposta em virtualmente qualquer ciência natural ou social. Um olhar de relance para qualquer catálogo de uma escola mostrará que os planos de estudos nas ciências ou nas engenharias seguem o dito da Academia de Platão e têm consideráveis pré-requisitos em matemática. No entanto, a razão para isto é diferente da tida pela Academia de Platão. Com o declínio do racionalismo, a matemática não é um modelo ou um caso de estudo para as ciências empíricas. Em vez disso, as ciências *usam* a matemática. Por causa deste papel, os departamentos de matemática estão entre os maiores na generalidade das universidades[3]. A questão de saber se a matemática é ou não uma actividade de aquisição de conhecimento é um assunto filosófico forte. No entanto, é claro que a matemática é um *instrumento* primário nas nossas melhores tentativas para compreender o mundo. Isto sugere que a filosofia da matemática é um ramo da epistemologia e que a matemática é um assunto importante para a epistemologia geral e para a metafísica. O que tem a matemática de especial que a torna necessária para a compreensão científica do universo físico e social? O que tem de especial o universo, ou nós, que concede à matemática um papel central para a sua compreensão? Galileu escreveu que o livro da natureza está escrito na linguagem da matemática. Este pensamento, metáfora enigmática, ilumina o lugar da matemática no empreendimento científico/filosófico de entendimento do mundo, mas não dá a mais pequena ideia de uma solução do problema em questão.

2. Filosofia e Matemática: Ovo ou Galinha?

Esta secção trata, brevemente, a relação entre a matemática e a filosofia da matemática (ver Shapiro 1994 e 1997: cap. 1 para uma explicação mais exaustiva). Até que ponto podemos esperar que a filosofia determine, ou mesmo sugira, a própria prática da matemática? Conversamente, até que ponto podemos esperar que a prática autónoma da matemática determine a filosofia da matemática correcta? Este é um exemplo de um assunto mais geral relativo ao lugar da filosofia entre os seus descendentes – as variadas disciplinas académicas. Questões similares levantam-se, digamos, na filosofia da física e na filosofia da psicologia. As respostas a estas questões motivam e dão o pano de fundo para os assuntos e problemas principais da filosofia da matemática, alguns dos quais são circunscritos no próximo capítulo.

Durante muito tempo, os filósofos e alguns matemáticos acreditavam que assuntos filosóficos, como a metafísica e a ontologia, determinavam a própria prática da matemática. Platão, por exemplo, defendeu que os conteúdos da matemática são um eterno e inalterável domínio ideal. Os objectos matemáticos, como os números e os objectos geométricos, não são criados ou destruídos, e não podem ser modificados. No livro 7 da *República*, ele lamentou-se que os matemáticos não sabem do que falam e por esta razão fazem matemática incorrectamente:

> [A] ciência [da geometria] está em rigorosa contradição com o que acerca dela afirmam os que a exercitam ... Fazem para aí afirmações bem ridículas e forçadas. É que é como praticantes e para efeitos práticos que fazem todas as suas afirmações, referindo-se nas suas proclamações a quadraturas, construções e adições e operações do género, ao passo que toda esta ciência é cultivada tendo em vista o saber ... do que existe sempre, e não do que a certa altura se gera ou se destrói. (Platão (1996), 527a)

Virtualmente, qualquer fonte de geometria antiga, incluindo o *Elementos* de Euclides, faz um vasto uso de linguagem construtiva e dinâmica: linhas são desenhadas, figuras são movidas à volta, funções são aplicadas. Neste respeito, a prática não se tem modificado muito até hoje. Se a filosofia de Platão é correcta, a linguagem dinâmica não tem sentido. Os objectos eternos e inalteráveis não são sujeitos a construção e movimento. Não podemos desenhar uma linha ou um círculo que sempre existiu; não podemos considerar que um eterno e inalterável segmento de linha pode ser cortado ao meio, para depois mover uma das partes por cima de outra figura.

Podemos pensar que a disputa aqui é pouco mais do que terminológica. Euclides escreveu que entre quaisquer dois pontos *podemos desenhar* uma linha recta. De acordo com os platonistas, não podemos fazer tal coisa, mas talvez eles possam reinterpretar este princípio. O *Grundlagen der Geometrie* de Hilbert (1899) contém um axioma platonisticamente correcto: entre quaisquer dois pontos *há* uma linha recta. Talvez Hilbert e Euclides tenham dito a mesma coisa se as suas linguagens forem apropriadamente entendidas. Platão, o próprio, teve poucos problemas em interpretar os seus geómetras em termos menos "lúdicos". O seu lamento era relativo à linguagem, não à geometria.

Todavia, quer na matemática, quer na filosofia, a situação não é assim tão simples. *Prima facie*, os problemas antigos, como trissectar um ângulo, quadrar um círculo e duplicar um cubo, não são questões de *existência*. Os geómetras, antigos e modernos, perguntaram-se, por exemplo, se *há* um ângulo de 20º, ou foi essa uma questão sobre se tal ângulo *pode ser desenhado* e, se sim, com que meios?

No século vinte, os debates acerca do intuicionismo proporcionam outro exemplo claro e simples de um desafio filosófico à matemática enquanto praticada. Os intuicionistas tradicionais eram exactamente o oposto de Platão, defendendo que os objectos matemáticos são *construções* mentais e que as proposições matemáticas devem de alguma forma se referirem à construção mental. L. E. J. Brouwer (1948), por exemplo, escreveu: "a matemática rigorosamente tratada a partir [do] ponto de vista [de] teoremas dedutivos exclusivamente por meios de construção introspectiva, é chamada de matemática intuicionista... [A]fasta-se da matemática clássica ... porque a matemática clássica acredita na existência de verdades desconhecidas". Arendt Heyting (1956) escreveu: "o programa de Brouwer ... consistiu na investigação da construção matemática mental como tal ... No estudo das construções matemáticas mentais, "existir" deve ser sinónimo de "ser construído" ... De facto, a matemática, do ponto de vista intuicionista, é o estudo de certas funções da mente humana". Os intuicionistas asseveram que a filosofia tem consequências relativamente à própria prática da matemática. Mais particularmente, negam a validade da chamada lei do terceiro excluído, a tese de que para qualquer proposição Φ, Φ é verdadeira ou não –

simbolizada, $\Phi \vee \neg\Phi$. Os intuicionistas argumentam que a lei do terceiro excluído e princípios relacionados nela fundamentados, são sintomáticos da fé na existência transcendental de objectos matemáticos e/ou na verdade transcendental das proposições matemáticas. A disputa estende-se por toda a matemática. Para um intuicionista, o conteúdo de uma proposição afirmando que nem todos os números têm uma certa propriedade P, simbolizada $\neg\forall x\ Px$, é refutável desde que possamos arranjar uma construção mostrando que P se verifica para cada número. O conteúdo de uma proposição que afirma que há um número que não tem a propriedade P, $\exists x\ \neg Px$, é uma que podemos construir um número x e mostrar que P não se verifica para x. Os intuicionistas concordam que a última proposição, $\exists x\ \neg Px$, implica a primeira, $\neg\forall x\ Px$, mas obstam a conversa, porque é possível que uma propriedade possa não se verificar universalmente e não conseguir construir um número para o qual ela não se verifica. Heyting observa que um realista, alguém que sustenta que os números existem independentemente do matemático, aceitará a lei do terceiro excluído e inferências relacionadas. Da perspectiva realista, o conteúdo de $\neg\forall x\ Px$ significa, simplesmente, que é falso que P se verifica universalmente e $\exists x\ \neg Px$ significa que há um número para o qual P não se verifica. Ambas as fórmulas referem-se a números, em si; nenhuma delas tem coisa alguma a ver com as capacidades de os matemáticos adquirirem conhecimento. Assim, as duas fórmulas são equivalentes. Qualquer uma delas pode ser derivada da outra em sistemas de lógica corrente, que codificam a chamada lógica *clássica*. Assim, parece que a correcção da lógica clássica se transforma numa consideração filosoficamente tradicional: se os números são independentes da mente, então a lógica clássica parece apropriada. Os intuicionistas supracitados asseveram que, dado os números serem objectos mentais, a lógica clássica deve dar lugar à lógica *intuicionista* ou àquilo que é por vezes chamado de lógica *construtiva*.

Consideremos uma outra batalha metodológica que foi pensada para estimular considerações filosóficas, uma com a qual nos ocuparemos várias vezes neste livro[4]. Uma definição de uma entidade matemática diz-se *impredicativa* se se referir a uma colecção que contém a entidade definida. Por exemplo, a definição usual de "menor dos majorantes" é impredicativa, porque se refere a um conjunto de majorantes e caracteriza um dos elementos deste conjunto. Henri Poincaré atacou, sistematicamente, a legitimidade das definições impredicativas fundamentado na ideia de que os objectos matemáticos não existem independentemente do matemático (e. g. Poincaré 1906; ver

Goldfarb 1988 e Chihara 1973). Em termos filosoficamente tradicionais, Poincaré rejeitou o infinito actual, insistindo que a única alternativa sensata é o infinito potencial: não há qualquer conjunto estático, digamos, de todos os números reais, determinados antes da actividade matemática. Desta perspectiva, as definições impredicativas são viciosamente circulares. Não podemos construir um objecto usando uma colecção que *já* o contém.

Em oposição, Gödel (1944) fez uma defesa explícita da definição impredicativa fundamentado no seu ponto de vista filosófico relativo à existência de objectos matemáticos

> ...o círculo vicioso ... aplica-se só se as entidades são construídas por nós próprios. Neste caso, deve claramente existir uma definição ... que não se refere a uma totalidade à qual o objecto definido pertença, porque a construção de uma coisa certamente pode não ser baseada numa totalidade de coisas cuja coisa a ser construída pertença. Se, no entanto, é uma questão sobre objectos que existem independentemente das nossas construções, não há nada menos absurdo na existência de totalidades contendo membros, que podem ser descritas (i. e., unicamente caracterizadas) apenas por referência a essa totalidade ... Classes e conceitos podem ... ser concebidos como objectos reais ... existindo independentemente de nós e das nossas definições e construções. Parece-me que a assunção desses objectos é tão legítima como a assunção de corpos físicos e há quase tanta razão para acreditar na sua existência.

De acordo com este realismo, uma definição não representa uma receita para construir, ou dito de outro modo, para criar um objecto. Em vez disso, é uma maneira de caracterizar ou apontar para uma coisa já existente. Assim, uma definição impredicativa não é viciosamente circular. A definição de "o menor dos majorantes" não é mais problemática do que outras definições "impredicativas", como o uso de "o idiota da aldeia" para referir a pessoa mais estúpida da aldeia, ou "o bêbado da cidade" para referir o pior alcoólico da cidade.

A direcção sugerida por estes exemplos é que a filosofia *precede* a prática nalgum sentido, metafisicamente, profundo. Ao nível fundamental, a filosofia *determina* a prática. A imagem é de que primeiro uma pessoa descreve ou descobre sobre o que é a matemática – se, por exemplo, as entidades matemáticas são objectivas ou dependentes do mental. Isto estabelece o modo como a matemática é para ser feita. Alguém que acredita na existência independente de objectos matemáticos aceitará a lei do terceiro excluído e as definições impredicativas. Chamemos a esta perspectiva de *princípio de filosofia primeira*. A ideia é de que primeiro averiguamos o que é aquilo de que falamos e apenas depois averiguamos o que dizer sobre isso em termos matemáticos. A filosofia tem a nobre tarefa de determinar a matemática. Em termos tradicionais, a concepção em questão é de que a filosofia fornece princípios primeiros às ciências "especiais" como a matemática.

Apesar dos exemplos dados, o princípio de filosofia primeira não é verdadeiro para a história da matemática. Apesar da matemática intuicionista e predicativa ser praticada "aqui e ali", na generalidade, a lógica clássica e as definições impredicativas estão amplamente entrincheiradas na matemática contemporânea. Apesar do contínuo debate entre filósofos, na matemática as batalhas substancialmente terminaram. De acordo com o cenário acima, uma pessoa pode pensar que a esmagadora maioria dos matemáticos optaram por um realismo como o de Gödel. Porém, em nenhuma altura a comunidade matemática vestiu chapéus filosóficos e decidiu que os objectos matemáticos, números, por exemplo, realmente existem, independentemente da mente dos matemáticos e, *por essa razão*, acha correcto tomar partido nas metodologias questionáveis de antigamente.

Em todo o caso, o caminho é o oposto. Na primeira metade deste século assistiu-se a um estudo intensivo sobre os papéis da lógica clássica e da definição impredicativa (e outros princípios) em domínios centrais da matemática como a análise, a álgebra, a topologia, etc. Verificou-se que a lei do terceiro excluído e as definições impredicativas eram essenciais à prática desses ramos, tal como eles se desenvolviam na altura. Brevemente, os princípios em questão não eram aceites porque o realismo os sancionava, mas porque eram necessários para uma prática tranquila da matemática. Num certo sentido, os matemáticos não podiam evitar usar os princípios em causa e, retrospectivamente, vemos quão empobrecida seria a matemática sem eles. Caso contrário, muitas distinções subtis teriam de ser feitas, as definições teriam de ser constantemente verificadas de "pedigree" construtivo ou predicativo, e o matemático necessitaria de prestar uma atenção particular à linguagem. Estes incómodos provaram-se ser artificiais e improdutivos. De forma crucial, muitos resultados importantes teriam de ser abandonados. Os matemáticos não acharam que os sistemas resultantes fossem atractivos[5].

O parágrafo de abertura do tratado de Richard Dedekind (1888) sobre os números naturais rejeita, explicitamente, a perspectiva construtivista. Em seguida, há uma nota de rodapé: "menciono isto expressamente porque Kronecker não há muito tempo ... tem procurado impor certas limitações sobre ... a matemática que acredito não serem justificadas; mas não parece haver motivo para abordar esta matéria com mais detalhe até que o distinguido matemático tenha publicado as suas razões para a necessidade ou mera conveniência destas limitações". O distinguido matemático Leopold Kronecker estabeleceu as suas razões, mas eram razões filosóficas. Dedekind aparentemente queria saber por que o matemático, como tal, devia restringir os seus métodos. Aparentemente, sustentou que a filosofia, por si mesma, não fornece estas razões. Assim, Dedekind rejeitou o princípio de filosofia primeira.

O princípio de filosofia primeira não é um tema dominante nos artigos filosóficos de Gödel. O propósito de Gödel (1944) é *responder* a um ataque, filosoficamente fundamentado, aos princípios matemáticos. O seu argumento é de que os criticismos metodológicos são baseados numa filosofia que ninguém necessita de seguir. Outras filosofias suportam outros princípios. Gödel não argumentou a favor do realismo, fundamentando-se em princípios primeiros anteriores à prática matemática. Os seus artigos filosóficos (1944 e 1964) contêm articulações lúcidas do realismo, argumentos de que o realismo adequa-se bem à prática matemática e, talvez, argumentos de que o realismo fornece um bom guia a esta prática. Gödel é conhecido pela sua concepção de que o motivo para a existência dos objectos matemáticos é exactamente paralelo ao motivo para a existência dos objectos físicos. O seu ponto, assim como o considero, é que ambos retirámos conclusões através de teorias (matemáticas e físicas) sucedidas e articuladas. Porém, isto não é, ou necessariamente não é, filosofia primeira.

Alguns filósofos sentem-se inclinados a ignorar o facto (se é um facto) que o princípio da filosofia primeira não está de acordo com a história da matemática. Eles reconhecem os "dados" da prática e da história mas mantêm uma pretensão normativa de que a matemática tem de ser dominada pela filosofia e, a par de Platão, Brouwer, Poincaré, Kronecker, *et al.*, são críticos dos matemáticos quando estes negligenciam ou violam a verdade de princípios filosóficos primeiros. Alguns destes filósofos reclamam que partes da matemática contemporânea são incoerentes e isto é desconhecido pelos praticantes que alegremente continuam com a sua prática impura. Seguindo a pretensão normativa, um filósofo pode formular um *telos* para os matemáticos e depois argumentar que os matemáticos não aceitam este *telos*, mas assim o deviam fazer; ou considerar que os matemáticos implicitamente aceitam o *telos*, mas não agem em modos de quem o segue. Podemos cair numa regressão, ou podemos cair numa disputa verbal sobre aquilo que é chamado de "matemática".

Outros filósofos, talvez a maioria, rejeitam o princípio da filosofia primeira, apenas porque não é um princípio verdadeiro relativamente à prática. O objectivo da filosofia da matemática é dar uma explicação coerente da *matemática* e, gostemos ou não, a matemática é aquilo que os matemáticos fazem.

Uma orientação global sobre este aspecto é de que a questão meta-filosófica estabelece-se tendo em conta alguma da literatura filosófica contemporânea e não apenas tendo em conta questões locais à matemática: em que medida a matemática contemporânea (ou outra coisa qualquer) é internamente consistente ou, dito de outro modo, coerente, de acordo com aquilo com as supostas reflexões do filósofo sobre o que é ser consistente ou coerente? Quais os critérios que contam? Como Humpty Dumpty de Lewis Carroll pode perguntar, quem está a mandar?

Um exemplo. Michael Dummett (e.g. 1973) avança um sem número de considerações relativamente à aprendizagem da linguagem e ao seu uso como um veículo de comunicação. Uma consequência destas considerações é que a lei do terceiro excluído não é globalmente válida e, assim, a lógica clássica devia ser substituída pela lógica intuicionista. Dummett, obviamente, sabe que se ele tem razão acerca da linguagem, então a prática matemática contemporânea é defeituosa e mesmo incoerente. Aqueles inclinados para a filosofia primeira podem considerar seriamente os argumentos de Dummett relativamente à linguagem. É realmente possível que Dummett esteja correcto e que quase todo o matemático seja incoerente ou, no mínimo, esteja equivocado de uma forma contínua e sistemática. Por outro lado, os filósofos anti-revisionistas, afastados da filosofia primeira, provavelmente rejeitariam peremptoriamente as considerações de Dummett acerca da linguagem. Eles defendem que os argumentos de Dummett acerca da linguagem *devem* ser errados se exigirem revisões na matemática. A questão retórica é esta: o que é mais firme e, provavelmente, correcto, a matemática como praticada ou a filosofia da linguagem de Dummett? Pondo as coisas em termos mais neutrais, Dummett argumenta que a matemática contemporânea não goza de um certo tipo de justificação, por sua vez, um anti-revisionista pode concordar com isto, mas imediatamente acrescentará que a matemática não necessita dessa justificação.

Consideremos, brevemente, o extremo oposto da filosofia primeira, a tese de que a filosofia é irrelevante para a matemática. De acordo com esta perspectiva, a matemática tem vida por ela própria e é bastante independente de quaisquer considerações filosóficas. Uma concepção filosófica nada tem para contribuir para a matemática e é, no pior, uma retórica sem significado, um emaranhado de palavreado e (tentativa de) intromissão de gente de fora. No melhor, a filosofia da matemática é uma servente indigna da matemática. Se a filosofia da matemática é de todo um trabalho, então a sua função é dar uma explicação coerente da matemática como praticada até então. Porém, o filósofo deve estar preparado para rejeitar, peremptoriamente, o seu trabalho, se desenvolvimentos na matemática entrarem em conflito com ele. Chamemos este princípio de *filosofia última*.

Na defesa da filosofia última, o (infortunado) facto é que muitos matemáticos, talvez a maior parte, não estão de todo interessados na filosofia e, afinal de contas, são eles que praticam e mais articulam o seu campo. Para o melhor e para o pior, a disciplina segue muito independentemente das reflexões dos filósofos.

É talvez irónico que haja filósofos com simpatia pela filosofia última. Os escritos de membros do círculo de Viena contêm proclamações contra as questões filosóficas tradicionais, especialmente aquelas da metafísica. Rudolf Carnap, por exemplo, argumenta que as questões filosóficas relativamente à existência real de objectos matemáticos são “externas” à linguagem matemática e, por esta razão, são meras “pseudo-questões”.

Presumo (ou pelo menos espero) que os anti-revisionistas não pretendam venerar a matemática e os matemáticos. Nenhuma prática é sacrossanta. Como humanos falíveis, os matemáticos ocasionalmente cometem erros, mesmo erros sistemáticos; e alguns erros podem ser desvelados por algo reconhecível como sendo filosofia. Assim uma posição anti-revisionista razoável talvez seja a de que qualquer princípio usado na matemática é por defeito tomado como correcto, mas não incorrigível. A correcção da maior parte da matemática é um princípio teórico de alto nível e bem enraizado. Dado o enorme sucesso da matemática – incluindo a lógica clássica, as definições impredicativas, etc. – seria trabalhoso destroná-la. Algumas reflexões baseadas nas próprias crenças intuitivas de um filósofo, ou em generalizações de observações sobre a linguagem comum, não transformariam a matemática consolidada, pelo menos não à custa exclusiva dos filósofos. A ideia sublinhada é de que os cientistas e os matemáticos usualmente sabem o que estão a fazer, e aquilo que fazem é interessante e vale a pena.

Talvez a filosofia primeira e a filosofia última façam um contraste demasiado claro. Como observado em cima, alguns matemáticos estão preocupados com a filosofia e, no mínimo, usam-na como um guia para o seu trabalho. Mesmo que não haja princípios filosóficos primeiros, a filosofia pode estabelecer a direcção da investigação matemática. Paul Bernays (1935), por exemplo, pode ser visto como rejeitando a filosofia última, quando ele escreveu que o "valor das concepções matemáticas platonisticamente inspiradas é que elas fornecem modelos [que] ... se salientam pela sua simplicidade e força lógica". Alguns observadores reclamam que a matemática tornou-se uma sucessão de disciplinas desorientadas e altamente especializadas, com especialistas incapazes de entender os trabalhos de cada um, mesmo em campos adjacentes. A filosofia pode ajudar a dar uma orientação e uma direcção, ainda que não forneça princípios primeiros.

Um exemplo extraordinário do parágrafo anterior é o de Gödel que reclamou que o seu realismo era um importante factor na descoberta da completude da lógica de primeira ordem e da incompletude da aritmética. O teorema da completude é uma consequência imediata de alguns dos resultados de Thoralf Skolem. Porém, Skolem não retirou essa conclusão. A razão para isto pode ser encontrada nas diferentes orientações que Skolem e Gödel tinham acerca da matemática, orientações que, aproximadamente, podem ser descritas como filosóficas[6].

Não iremos aqui resolver a questão filosofia primeira vs. filosofia última, ou filosofia intermediária a ambas. Com toda a probabilidade, pessoas inclinadas a uma versão extrema da filosofia última não acharão o tópico deste livro interessante. Porém, talvez, os restantes de nós possamos concordar que os filósofos têm os seus próprios interesses, para além dos colegas noutros departamentos, e a persecução desses interesses é interessante e vale a pena. O trabalho do filósofo da matemática deve misturar-se com o do matemático, mas, pelo menos parte desse trabalho, é um trabalho diferente. A filosofia e a matemática estão intimamente inter-relacionadas, sem nenhuma dominar a outra. Deste ponto de vista, a maneira correcta de fazer matemática não é uma consequência directa da filosofia verdadeira, nem a maneira correcta de fazer filosofia da matemática é uma consequência imediata da matemática como praticada.

O trabalho do filósofo é dar uma explicação da matemática e do seu lugar nas nossas vidas intelectuais. Qual é o conteúdo da matemática (ontologia)? Qual é a relação entre os conteúdos da matemática e da ciência que permitem tão amplas aplicações e cruzamentos de ideias? Como é que conseguimos elaborar e obter conhecimento de matemática (epistemologia)? Como pode a matemática ser ensinada? Como é que a linguagem matemática é entendida (semântica)? Em síntese, o filósofo deve dizer alguma coisa sobre a matemática, as aplicações da matemática, a linguagem matemática e alguma coisa sobre nós. Uma tarefa desalentadora, mesmo sem o trabalho de ter de alcançar princípios primeiros.

Como vejo isto é que o propósito primário da filosofia da matemática é *interpretar* a matemática e, deste modo, iluminar o lugar da matemática em todo o empreendimento intelectual. De acordo com o anti-revisionismo, é *matemática* o que nós interpretamos e não o que uma teoria filosófica *a priori* diz sobre o que a matemática devia ser. Em geral, qualquer interpretação pode e deve envolver criticismo, mas, de acordo com o anti-revisionismo, o criticismo não vem de fora – de princípios pré-concebidos. Um revisionista, talvez no seguimento da filosofia primeira, pode argumentar que a matemática, tal como praticada, não tem uma interpretação coerente. Ele propõe correcções ou substituições para colocar a matemática num melhor fundamento, enquanto preservando a sua própria função. Manter-nos-emos neutrais sobre este aspecto, no sentido de proporcionar cobertura a uma variedade de posições importantes.

Talvez todas as partes possam concordar que a filosofia da matemática é feita por aqueles que se preocupam com a matemática e querem compreender o seu papel no empreendimento intelectual. Um matemático que adopte uma filosofia da matemática deve ganhar alguma coisa com isso: uma orientação no trabalho, alguma intuição sobre a sua perspectiva e o seu papel e, no mínimo, um guia possível para o seu caminho – que géneros de problemas são importantes, que questões devem ser postas, que metodologias são razoáveis, o que é provável ter sucesso, e por assim em diante.

3. Naturalismo e Matemática

Quine (1981: 72) caracteriza o naturalismo como "o abandono do objectivo de uma filosofia primeira" e "o reconhecimento que é no interior da própria ciência ... que a realidade é para ser identificada e descrita" (ver também Quine 1969). Desta perspectiva, a questão epistemológica primária é a de determinar como nós humanos, vistos como organismos naturais no mundo físico, procedemos para aprender algo acerca do mundo à nossa volta. O naturalista quineano alega que a ciência tem o pensamento mais plausível sobre isto e, assim, a epistemologia deve ser contínua com a ciência e em última instância com a física. Um *slogan* é o de que a epistemologia é um ramo da psicologia cognitiva. Qualquer conhecimento que nós humanos reclamemos deve ser consistente com a nossa melhor explicação de nós próprios enquanto sujeitos cognoscentes. O mesmo ocorre para a ontologia e qualquer outra investigação filosófica: "o filósofo naturalista começa os seus raciocínios no interior de uma teoria do mundo que herdou já em pleno funcionamento... [A] teoria do mundo que herdou é primariamente uma teoria científica, o produto corrente do empreendimento científico" (Quine 1981: 72).

De uma maneira ou de outra, o naturalismo tornou-se popular entre os filósofos, especialmente na América do Norte onde é grande a influência de Quine. Termino este capítulo com algumas palavras sobre as ramificações do naturalismo na filosofia da matemática. O tópico é recorrente ao longo do livro.

Reafirmando o óbvio, o naturalismo de Quine implica a rejeição daquilo que chamo de filosofia primeira. O naturalista olha para a ciência física "como uma investigação sobre a realidade, falível e corrigível, mas não respondível em qualquer tribunal supra-científico, e sem necessitar de qualquer justificação para além da observação e do método hipotético-dedutivo" (Quine 1981: 72). Podemos interpretar as passagens chave como um endosso para a filosofia última, mas Quine não vai tão longe. Ele vê a ciência e, pelo menos, partes da filosofia como uma contínua "teia de crenças". Uma concepção filosófica que esteja totalmente divorciada da ciência como praticada deve ser rejeitada – "boa viagem" – mas o tráfego ao longo e através de uma fronteira difusa é encorajado. A epígrafe ao seu influente livro *Word and Object* (1960) é uma citação de Otto Neurath (1932), "somos como marinheiros que têm de reconstruir o seu barco em alto mar, sem serem capazes de o desmantelar numa doca seca e reconstruí-lo a partir das suas melhores componentes". Quine não inclui a frase seguinte do texto de Neurath, que é: "apenas a metafísica pode desaparecer sem rasto". Parte da metafísica é uma parte integral do "barco" científico e não pode ser exorcizada.

Se a metáfora de Quine do barco de Neurath é para ser tomada seriamente, a questão de filosofia primeira e filosofia última perde muita da sua força ou mesmo o seu sentido. Antes de podermos determinar se a restante/legítima parte da filosofia é filosofia primeira, última ou intermediária entre ambas (*vis-à-vis* a matemática ou outra coisa qualquer), teríamos de separar a filosofia da teia de crenças. Famosamente, Quine argumenta que não podemos fazer tal coisa (ver também Resnik 1997: cap. 6-7). Ou seja, grandes partes da filosofia são essencialmente *parte* do empreendimento científico. Isto é a chamada filosofia naturalizada.

Relativamente à filosofia da matemática, há uma importante ironia no foco de Quine sobre a ciência. Para Quine, o empirista moderno, o objectivo motriz da ciência/filosofia é explicar e prever a experiência sensorial. Ele alega que a ciência tem o único pensamento plausível acerca disto e aceita a matemática apenas na medida que é necessária para a descoberta científica/filosófica (talvez com um pouco mais de matemática para arredondamentos). Ele não aceita (como verdadeiras) as partes da matemática, como a teoria avançada dos conjuntos, que vão para além deste papel de apoio à ciência empírica. Ou seja, Quine sustenta que se uma parte da matemática não desempenha um papel inferencial (mas indirecto) em partes da teia científica que se relacionam com a percepção sensorial, então essa parte deve ser expelida, via navalha de Ocham. Assim Quine faz sugestões aos matemáticos, baseado nesta concepção geral de filosofia da matemática e ciência. Sugere, por exemplo, que os matemáticos que investigam em teoria dos conjuntos adoptem um certo princípio, chamado "V = L", uma vez que a teoria resultante é limpa e assim, presumivelmente, é uma teoria mais fácil de aplicar. Ignoremos o facto de que a maior parte dos matemáticos que investigam em teoria dos conjuntos são cépticos relativamente a este princípio. Neste aspecto, a argumentação de Quine é no espírito de uma filosofia primeira relativamente à matemática ainda que seja de ciência/filosofia primeira.

A versão do naturalismo de Penelope Maddy (Maddy 1997) prescreve uma atitude deferencial relativamente aos matemáticos como aquela que Quine tem relativamente aos cientistas. O argumento, em parte, é que a teia de crenças científica, vista como é praticada, não é tão contínua como Quine alega. Não há uma única teoria regedora que cubra todos os ramos da ciência natural e da matemática. A matemática tem a sua própria metodologia que tem demonstrado êxito ao longo dos séculos. O êxito da matemática é avaliado em termos matemáticos e não em termos científicos.

Contra Quine, podemos argumentar que se os matemáticos apenas tomassem como investigação séria aqueles ramos da matemática, conhecidos por terem aplicações na ciência natural, não teríamos muita da matemática que temos nos dias de hoje, nem teríamos toda a *ciência* que temos nos dias de hoje. A história da ciência está cheia de casos onde ramos de matemática "pura" acabaram por encontrar aplicações na ciência. Por outras palavras, os objectivos gerais da descoberta científica têm sido bem satisfeitos por matemáticos seguindo as suas próprias disciplinas com a sua própria metodologia.

Este argumento tem força no interior da organização geral do empirismo holista de Quine. Ele defende que a matemática é importante ou legítima apenas na medida que ajuda a ciência. Se considerarmos “ajuda” em sentido amplo, vemos que a ciência tem sido bem satisfeita deixando os matemáticos proceder pelos seus próprios critérios, ignorando a ciência se assim for necessário. Assim, não necessitamos de uma ligação directa inferencial entre um pedaço da matemática e a experiência sensorial para podermos aceitar a matemática como uma legítima parte da teia. Em todo o caso, Maddy não aprova o holismo global de Quine. Ela considera seriamente as fronteiras da teia de crenças e sustenta que não temos de mostrar que há uma ligação última à ciência que justifica a matemática, quer localmente, quer globalmente. A matemática não olha para a ciência nem para a filosofia em busca de criticismo ou justificação.

Maddy assim duvida do empirismo de Quine. As costuras na teia de crenças – o barco de Neurath – indicam que há objectivos legítimos para além da previsão e do controle da experiência sensorial.

Um defensor da astrologia pode fazer uma reclamação análoga: a astrologia tem evidenciado êxito nos seus próprios termos (independentemente de quais são esses termos)[7]. A astrologia tem a mesma autonomia e sustentação que a matemática? O naturalismo de Quine e de Maddy concederiam que não há necessidade de fornecer uma *justificação* extra-científica e extra-matemática para a atitude diferenciada de gostos sobre a astrologia, por um lado, e sobre a matemática e a ciência por outro. Relembremo-nos de que não há qualquer tribunal extra-científico (ou extra-matemático). Os critérios científicos ordinários são suficientes para rejeitar a astrologia. Talvez não haja necessidade de explicar a atitude diferenciada, mas podemos apelar ao papel da matemática na teia global de crenças. Seguindo Maddy, e concordando com a autonomia da matemática, não são de ignorar as ligações profundas entre a matemática e a ciência.

Em suma, para Maddy, assim como para Quine, a filosofia primeira é firmemente rejeitada. A filosofia não critica a matemática. A filosofia também não justifica a matemática. Apenas a matemática faz isso. Tal como disse em cima, a filosofia última não se segue destas teses. Maddy (1997, cap. 3) distingue as partes da filosofia tradicional, que são “contínuas com a matemática”, das partes que estão fora da matemática mas “contínuas com a ciência”, e aquelas partes que estão fora da ciência e da matemática. Apesar das fronteiras entre estas partes não serem claras, apenas as partes do primeiro grupo têm alguma ligação na tarefa mais importante que é a tarefa de delinear (criticar ou melhorar) a metodologia matemática. Partes do último grupo – aquelas fora da matemática e da ciência – são os aspectos da filosofia tradicional que são rejeitados como sendo filosofia primeira. Desaparecem sem deixar rasto. O grupo do meio – as partes da filosofia fora da matemática e contínuas com a ciência – inclui a "filosofia naturalizada" de Quine.

A questão, tal como a vejo, é sobre até que ponto parte da filosofia é suposta justificar ou fundamentar a matemática ou a ciência, e não propriamente sobre até que ponto parte da filosofia é científica ou "contínua" com a ciência. Talvez isto pouco mais seja que uma preferência terminológica, uma vez que a maior parte dos disparos de Maddy e de Quine é direccionada à filosofia primeira, a ideia de que a filosofia fornece a justificação última para a matemática.

Tradução: Eduardo Castro

[CFUL/FCT(SFRH/BD /16755/2004)]

Tradução publicada com a autorização do autor.

Referências

Benacerraf, P. e Putnam, H. (1983), *Philosophy of Mathematics* (Cambridge: CUP).

Bernays, P. (1935), "Sur le Platonisme dans les Mathématiques", *L'Enseignement Mathématique*, 34, 52-69; trad. ing. "Platonisme in Mathematics", in Benacerraf e Putnam (1983), 258-71.

Brouwer, L. (1948), *Intuitionisme en Formalisme*, (Gronigen: Noordhoof); trad. ing. "Intuitionisme and Formalism", in Benacerraf e Putnam (1983), 77-89.

Chihara, C. (1973), *Ontology and the Vicious-Circle Principle*, (Nova Iorque: Cornell University Press).

Dedekind, R. (1888), *Was sind und was sollen die Zahlen?*, (Brunswick: Vieweg); trad. ing. "The Nature and Meaning of Numbers", in *Essays in the Theory of Numbers*, (ed.) W. Breman, (Nova Iorque: Dover Press, 1963), 31-115.

Dummett, M. (1973), "The Philosophical Basis of Intuitionistic Logic", reimpresso in Benacerraf e Putnam (1983), 97-129.

Gödel, K. (1944), "Russell's Mathematical Logic", in Benacerraf e Putnam (1983), 447-69.

Gödel, K. (1951), "Some Basic Theorems on the Foundations of Mathematics and Their Implications", in Gödel (1995), 304-23.

Gödel, K. (1964), "What is Cantor's Continuum Problem", in Benacerraf e Putnam (1983), 470-85.

Gödel, K. (1986), *Collected Works I*, (Oxford: OUP).

Gödel, K. (1995), *Collected Works III*, (Oxford: OUP).

Goldfarb, W. (1988), "Poincaré Against the Logicists", in *History and Philosophy of Modern Mathematics*, (eds.) W. Aspray e P. Kitcher, Minnesota Studies in the Philosophy of Science, 12 (University of Minnesota Press), 24-40.

Heyting, A. (1956), *Intuitionism, an Introduction*, (Amsterdão, Holanda).

Hilbert, D. (1899), *Grundlagen der Geometrie* (Leipzig, Teubner); trad. port. *Fundamentos da Geometria*, (Lisboa: Gradiva, 2003).

Maddy, P. (1993), "Does V Equal L?", *Journal of Symbolic Logic*, 58, 15-41.

Maddy, P. (1997), *Naturalism in Mathematics*, (Oxford: OUP).

Neurath, O. (1932), "Protokollsätze", *Erkenntis*, 3, 204-14.

Parsons, C. (1983), *Mathematics in Philosophy*, (Nova Iorque: Cornell University Press).

Platão (1996), *A República*, (Lisboa: FCG).

Poincaré, H. (1906), "Les Mathématiques et la Logique", *Revue de Métaphysique et de Morale*, 14, 294-317.

Quine, W. (1960), *Word and Object*, (Cambridge: MIT Press).

Quine, W. (1969), *Ontological Relativity and Other Essays*, (Nova Iorque: Columbia University Press).

Quine, W. (1981), *Theories and Things*, (Cambridge: HUP).

Resnik, M. (1997), *Mathematics as a Science of Patterns*, (Oxford: OUP)

Shapiro, S. (1994), "Mathematics and Philosophy of Mathematics", *Philosophia Mathematica*, 3: 2, 148-60.

Shapiro, S. (1997), *Philosophy of Mathematics: Structure and Ontology,* (Nova Iorque: OUP).

Wang, H. (1974), *From Mathematics to Philosophy*, (Londres: Routledge & Kegan Paul).

---

[*] Shapiro, S. (2000), "What Is So Interesting About Mathematics (For a Philosopher)?", in *Thinking about Mathematics – The Philosophy of Mathematics*, (Grã-Bretanha: OUP), 3-20. Este material é um texto introdutório à filosofia da matemática que analisa o papel da matemática na história da filosofia e a sua relação com a filosofia da matemática. (*N. do T.*)

[♣] Stewart Shapiro é Professor na Universidade do Estado do Ohio (EUA) e na Universidade de St. Andrews (Escócia), organizador do *Oxford Handbook of Logic and Philosophy of Mathematics* e autor de *Philosophy of Mathematics: Structure and Ontology*.

[1] Alguns estudantes, sofrendo da chamada "ansiedade matemática", são atraídos para a filosofia por causa do seu lugar nas humanidades, afastada das ciências. Porém, eles desmaiam ao encontrar disciplinas de lógica matemática nas licenciaturas da maior parte das instituições. Isso é facilmente justificado, dado o papel das linguagens formais em muita da literatura filosófica contemporânea. Por outro lado, os estudantes de ciências ou engenharias, talvez sofrendo daquilo que eles chamam de "evitar as humanidades", estão deliciados em saber que disciplinas de lógica por vezes são necessárias em requisitos das humanidades.

[2] Durante os verões de 1967-9, tive o privilégio de assistir a um NSF Programa de Verão em Matemática para estudantes de liceu na Universidade do Estado de Ohio. O director, Arnold Ross, aconselhou-nos a pensar profundamente sobre coisas simples. Um bom conselho, tanto para um matemático, como para um filósofo.

[3] Nas universidades americanas, apenas os departamentos de Inglês são, provavelmente, tão grandes.

[4] Outros exemplos incluem o axioma da escolha e extensionalidade geral. Ver Shapiro 1997: cap. 1.

[5] Ver Maddy (1993) para considerações similares relativamente à definibilidade.

[6] Ver cartas de Gödel a Hao Wang, publicadas em Wang (1974), e introduções, por Burton Dreben e Jean van Heijenoort, aos resultados da completude em Gödel (1986). Ver também Gödel (1951).

[7] Superficialmente, a ciência e a astrologia têm os mesmos objectivos, nomeadamente a previsão, e assim podem ser comparadas por critérios comuns, pelo menos em princípio. Um observador neutral podia tornar as previsões precisas e depois compará-las. Claro que os astrólogos não sujeitam a sua "disciplina" a testes científicos correntes.