A Matemática é Acerca de Quê?*

Michael Dummett

Das disciplinas intelectuais, as duas mais abstractas, filosofia e matemática, dão origem à mesma perplexidade: elas são *acerca* de quê? A perplexidade não emerge somente da nossa ignorância: mesmo os praticantes destas matérias podem achar difícil responder à questão. A matemática apresenta-se como uma ciência no sentido geral em que a história é uma ciência, nomeadamente como uma área na procura pela verdade. Mesmo aqueles menos instruídos nas outras ciências, porém, têm uma ideia geral acerca de quê essas ciências se esforçam por estabelecer a verdade. Os historiadores procuram estabelecer a verdade sobre o que foi feito e o que aconteceu aos seres humanos no passado, mais exactamente, após terem inventado a escrita. Os físicos tentam descobrir as propriedades gerais da matéria nas mais variadas condições, mais geralmente, da matéria e do que a propaga, tal como luz e calor. Mas os matemáticos investigam o quê?

Uma resposta pouco esclarecedora podia ser dada listando vários tipos de objectos matemáticos e estruturas matemáticas: os matemáticos estudam as propriedades dos números naturais, números reais, números ordinais, grupos, espaços topológicos, variedades diferenciáveis, reticulados, *entre outras*. À parte a dificuldade de explicar "entre outras.", tal resposta é pouco esclarecedora porque é dada a partir de dentro: uma pessoa tem de conhecer alguma matemática – mesmo se, em alguns casos, somente um pouco – para se conseguir entender a resposta, ao passo que as respostas típicas às questões relativas à história ou à física podem ser entendidas sem quaisquer conhecimentos história ou física.

Alguns sustentam, no entanto, que a matemática é uma ciência como outra qualquer. *Prima facie*, a pretensão não convence: o que é imediatamente saliente na matemática é de como ela é diferente doutra ciência qualquer. É verdade que, nas ciências mais matematizadas, como a física, podem ser elaboradas deduções a partir de premissas iniciais, tal como acontece na matemática; mas elas desempenham um papel diferente. Na matemática, o seu objectivo é estabelecer teoremas, isto é, verdades matemáticas; na física, elas servem para derivar consequências de uma teoria, que depois podem ser usadas para fazer previsões mas também para testar a teoria. A palavra "teoria" é usada de modo muito diferente na matemática e nas outras ciências. Na física, biologia, e outras, a palavra "teoria" transportou a conotação de uma hipótese; apesar de uma teoria, física ou biológica, estar estabelecida, ela mantém-se sempre aberta à refutação ou revisão. Na matemática, não há tal conotação. Estamos todos familiarizados com a ideia de observações planeadas para testar – confirmar ou refutar – a teoria da relatividade geral; mas devemos ser incapazes de conceber observações planeadas para testar a teoria dos números ou a teoria dos grupos.

O esforço mais determinado para descrever a matemática como empírica na sua natureza foi feito por John Stuart Mill; mas ele encontrou pouco mais do que apontar, o que é em qualquer caso evidente, que a matemática pode ser *aplicada* à realidade empírica. Na verdade, esta é uma característica visível da matemática que qualquer descrição filosófica dela deve explicar; mas não é para ser explicada caracterizando a matemática, em si mesma, como uma ciência empírica. O nosso próprio vocabulário indica a diferença. Não falamos em "aplicar" uma teoria física quando retiramos resultados físicos dela, mas somente quando baseamos nela alguma inovação tecnológica. Mesmo que alguém aceitasse todos os argumentos de Mill não teria razões para considerar a matemática como uma outra ciência qualquer; ela continuaria ainda a diferir marcadamente de todas as outras. Para Mill, os axiomas e as definições da matemática são derivados a partir de factos muito gerais aparentes à observação não regida; mas os teoremas são ainda resultados retirados por raciocínio dedutivo desses axiomas e definições, sem mais apelo à observação, muito menos a observações refinadas feitas em condições artificialmente criadas ou com a ajuda de instrumentos sofisticados. Acresce, como Frege chamou à atenção, as noções matemáticas, cuja aplicação Mill estava ansioso por situar somente na realidade física, têm de facto uma aplicação mais vasta. É enganador dizer que encontramos os números naturais, por exemplo, no mundo físico; visto que, enquanto as situações físicas podem, na verdade, necessitar de ser descritas evocando um número natural como o número de objectos não-físicos de um dado género, situações não-físicas podem igualmente necessitar de ser descritas como o número de objectos não-físicos de um dado género, por exemplo, como o número de diferentes demonstrações do teorema fundamental da álgebra, ou, na verdade, o número de raízes de uma equação. O mesmo mantém-se válido para os conjuntos. Estas noções são demasiado gerais para as situarmos num qualquer particular domínio da realidade; como Frege sustentou, elas aplicam-se em cada área da realidade, e as leis que as governam mantém-se válidas, não somente sobre aquilo que descobrimos existir, mas sobre tudo aquilo de que podemos formar pensamentos inteligíveis.

Se a matemática não é sobre um domínio particular da realidade, então *é* acerca de quê? Alguns têm desejado sustentar que é, na verdade, uma ciência como outra qualquer, ou, talvez, diferindo das outras somente no aspecto em que o seu conteúdo é um domínio super-empírico de entidades abstractas, ao qual temos acesso por meio de uma faculdade intelectual da intuição análoga aquelas faculdades sensórias por meio das quais estamos conscientes do domínio físico. Enquanto a concepção empirista confinou a matemática demasiado perto à certeza das suas aplicações, esta concepção, geralmente denominada "platonista", isola-a demasiado longe delas: deixa ininteligível como as criaturas deste domínio atemporal, supra-sensível podiam ter alguma conexão, ou relação, com as condições no domínio temporal sensível em que habitamos.

A concepção platonista, tal como a empirista, fracassa em fazer justiça ao papel da demonstração na matemática. Visto que, presumivelmente, o domínio supra-sensível é tanto uma criação de Deus como é o domínio sensível; se assim é, as condições deste devem ser tão contingentes como as do anterior. A hipótese do contínuo, por exemplo, pode *acontecer* confirmar-se, mesmo ainda que não possamos apreender nem a sua verdade, nem coisa alguma na qual a sua verdade é implícita. Que pode haver factos matemáticos que devemos ser sempre incapazes de estabelecer é uma possibilidade admitida por alguns matemáticos e filósofos da matemática, ainda que negada por outros. Quando admitida, no entanto, é normalmente admitida com o fundamento de que os nossos poderes inferenciais são limitados: pode haver resultados das nossas assunções iniciais que somos incapazes de retirar. Se estes são resultados de primeira ordem, podíamos "em princípio" retirá-los, uma vez que eles podiam ser derivadas por raciocínio em que cada passo era simples; mas as demonstrações podem ser demasiado longas e complexas para nós e de jamais sermos capazes de acertar, ou mesmo segui-las, na prática. Se eles são resultados de segunda ordem, podemos ser incapazes, mesmo em princípio, de ver que eles se seguem. Mas, se tomarmos seriamente a analogia entre a nossa suposta faculdade da intuição e a nossa faculdade perceptual, não há qualquer razão por que não possa haver factos matemáticos que não são em qualquer sentido resultados de alguma coisa da qual estamos conscientes. Podemos observar um objecto físico sem perceber todas as suas características ou sermos capazes de as deduzir todas a partir daquilo que percepcionamos; se as estruturas matemáticas são meramente os habitantes de outro domínio da realidade, apreendidos por nós num modo análogo à nossa percepção dos objectos físicos, não há qualquer razão por que o mesmo não deva ser verdade para elas. Na verdade, há na matemática hipóteses e conjecturas, tal como há na astronomia; mas, enquanto ambos os géneros podem ser refutados por dedução de resultados e demonstrando-os ser falsos, na matemática as hipóteses não podem ser estabelecidas mostrando simplesmente que os seus resultados são verdadeiros. Em particular, não podemos argumentar que a verdade de uma hipótese é a única coisa que explicaria um dos resultados verificados; na matemática não há qualquer coisa que possa ser descrita como uma inferência para a melhor explicação. Acima de tudo, não procuramos, no sentido de refutar ou de confirmar uma hipótese, um meio de refinar as nossas faculdades intuitivas, assim como os astrónomos procuram melhorar os seus instrumentos. Em vez disso, se supomos uma hipótese verdadeira, procuramos por uma demonstração dela, e permanece uma mera hipótese, cuja asserção seria portanto não garantida, até encontrarmos uma. Na verdade, procuramos tornar os nossos métodos de demonstração ainda mais explícitos e precisos. Porém, isto não é análogo ao melhoramento dos instrumentos. Os métodos de demonstração servem para derivar resultados, não para produzir uma base de dados mais extensiva; se uma hipótese é para ser estabelecida, isto deve ser feito, não pelo teste dos seus resultados, mas apresentando-a como um resultado daquilo que já conhecemos. O platonismo não pode explicar melhor estas diferenças entre a matemática e as ciências naturais do que o empirismo pode, visto que ambos se perdem pretendendo discernir uma analogia demasiado próxima entre elas.

Uma resposta brilhante à nossa questão, mas agora geralmente desacreditada, foi dada por Gottlob Frege e sustentada por Russell e Whitehead. Era, essencialmente, que a matemática não é sobre *qualquer coisa em particular*: consiste, mais propriamente, na construção sistemática de argumentos dedutivos complexos. O raciocínio dedutivo é capaz de derivar, a partir de premissas comparativamente emagrecidas e por caminhos afastados do imediatamente óbvio, uma abundante quantidade de resultados, por vezes, surpreendentes; na matemática, estes caminhos são explorados e os meios de derivar estes resultados são armazenados para uso futuro sob a forma de proposições. Nesta descrição, os teoremas matemáticos incorporam subrotinas dedutivas que, uma vez descobertas, podem ser repetidamente usadas numa variedade de contextos.

Esta resposta, geralmente chamada de a tese "logicista", foi brilhante porque simultaneamente explica várias características confusas da matemática. Explica a sua metodologia, que não envolve qualquer observação, mas que se fundamenta na demonstração dedutiva. Explica a qualificação elevada que é necessária para uma asserção: nas outras ciências, ter um elevado grau de probabilidade é considerado como uma razão suficiente para avançar um enunciado como verdadeiro, mas, na matemática, tem de ser incontroversamente *demonstrado*. Explica a sua generalidade; explica a nossa impressão da necessidade das suas verdades; explica por que estamos tão perplexos em dizer sobre o que é. Acima de tudo, explica por que a matemática tem essas aplicações variadas, e o que é para ela ser aplicada. Permite que os enunciados matemáticos sejam genuinamente proposições, verdadeiras ou falsas, e por isso importa para o que é manifestamente assim, que os matemáticos podem estar interessados em determinar os seus valores de verdade independentemente dos usos que eles lhes possam dar; ao mesmo tempo, explica o conteúdo dessas proposições como dependendo da possibilidade de as aplicar, e assim justificar o *dictum* de Frege de que é a aplicabilidade, por si só, que traz a aritmética do nível de um jogo para o nível de uma ciência. Por contraste, a explicação de Wittgenstein da matemática, que põe ainda mais ênfase na aplicação, faz da existência dos matemáticos puros um fenómeno para a patologia.

(...)

Para Frege, por outro lado, o erro que bloqueou qualquer filosofia da matemática aceitável foi a falha em reconhecer que os objectos abstractos podem ser tão objectivos como os concretos (na sua terminologia, objectos não-actuais como os actuais). Ele caracterizou os objectos abstractos muito na linha do que os filósofos estão dispostos a fazer actualmente, nomeadamente como objectos sem poderes causais; por "objectivo" ele queria dizer algo que nem é um conteúdo da consciência, nem é criado por qualquer processo mental. Uma queixa corrente acerca dos objectos abstractos é que, uma vez que eles não têm quaisquer poderes causais, eles não podem explicar coisa alguma, e que o mundo pareceria o mesmo para nós se eles não existissem: podemos portanto não ter razão para acreditar na sua existência. Para Frege, tal queixa revelaria um equívoco grosseiro. Ele deu um exemplo de um objecto que é abstracto mas perfeitamente objectivo – o equador. Se tentasses explicar a alguém que nunca ouviu falar do que era o equador, certamente terias de o convencer que não pode ser visto, que não pode tropeçar nele, e que não sente nada quando o atravessa. Se ele então objectasse que tudo seria exactamente o mesmo se não existisse tal coisa como o equador, e que portanto não podemos ter razões para supo-lo existir, seria claro que ele ainda não tinha entendido que género de objecto consideramos o equador ser. O que tem de ser feito é explicar-lhe como o termo "o equador" é usado em frases completas: como é determinado se alguém atravessou ou não o equador, se alguma característica natural reside nele, ou a norte, ou a sul dele, e assim por diante. Isto é tudo o que pode ser feito, e tudo o que precisa de ser feito: se ele continuar a persistir em objectar, não há coisa alguma que possamos fazer a não ser lamentarmos por estar agarrado a uma imagem equívoca.

Assim a referência a um objecto abstracto é para ser compreendida somente pela apreensão do conteúdo de frases envolvendo essa referência, e é somente pela especificação das condições de verdade dessas frases que pode ser explicado o que tal objecto é: é somente no curso de dizer algo inteligível acerca de um objecto que fazemos genuína referência a ele. Isto, de facto, mantêm-se válido para todos os objectos, concretos ou abstractos; mas, por causa do fracasso dos filósofos em avaliar a dependência da referência no contexto de uma proposição, eles são tentados a rejeitar o objecto referido, como sendo mitológico, apenas quando é abstracto, uma vez que as frases envolvendo referência a objectos concretos incluem aquelas nos quais eles são indicados por meios de termos demonstrativos, que quer dizer que os objectos concretos podem ser encontrados. Para Frege, contudo, tratar os objectos matemáticos, tal como os números, como fictícios porque são abstractos é cometer um engano grosseiro idêntico ao caso do equador, que surge do mesmo equívoco sobre o que referir um objecto envolve.

(...)

Apesar do seu realismo acerca da matemática, nem mesmo Frege pensou que a realidade matemática determinava a verdade ou a falsidade de enunciados quantificados sobre um domínio de objectos matemáticos, sem a nossa necessidade de especificar as suas condições de verdade; e os seus sucessores, não esquecidos do desastre que o atingiu, têm aceitado a necessidade de especificar o domínio completamente, ou formar alguma concepção dele, antes de interpretar os predicados primitivos de uma teoria como se aplicando a elementos desse domínio. Notoriamente, porém, temos encontrado poucos meios melhores, do que aqueles que Frege encontrou, para sermos sucedidos nesta tarefa. As caracterizações dos domínios de teorias matemáticas fundamentais, como a teoria dos números reais que estamos acostumados a empregar usualmente, não convencem alguém que qualquer concepção clara os subscreve salvo aqueles que já estão convencidos; isto conduz a um impasse na filosofia da matemática onde a fé se opõe à incredibilidade sem nenhum deles estar na posse dos recursos para ultrapassar o outro. Além disso, esta consequência parece intrínseca à situação. Uma teoria matemática fundamental, para o propósito presente, é uma a partir da qual derivamos originalmente a nossa concepção de uma totalidade a respeito da cardinalidade relevante: parece evidente que não podemos caracterizar o domínio de tal teoria sem circularidade.

Qual é saída deste impasse? Podemos aflorar isto perguntando pelo erro que subscrevia as assunções que conduziram Frege em contradição – não aquele que o envolveu na justificação falaciosa dessas assunções, mas as assunções elas próprias. Crescemos tão acostumados aos paradoxos da teoria dos conjuntos que não nos admiramos mais com eles; porém a sua descoberta foi uma das mais profundas descobertas conceptuais de todos os tempos, vale a pena colocá-la ao nível da descoberta dos números irracionais. Cantor viu mais profundamente no assunto do que Frege: ele estava consciente, muito antes, que alguém não pode simplesmente assumir que todo o conceito tem uma extensão com uma cardinalidade determinada. Porém, mesmo ele não viu o caminho todo: dado que ele fez a distinção entre conceitos que têm, e aqueles que não têm, uma tal extensão como sendo uma distinção absoluta, onde a profundeza da descoberta reside no facto que não é esse o caso. Tomada como uma distinção absoluta, gera uma perplexidade irresolúvel. Estamos completamente familiarizados com a concepção de números cardinais transfinitos, mas considere o que acontece quando alguém é pela primeira vez apresentado a essa concepção. Uma certa resistência tem de ser primeiramente ultrapassada: para alguém que esteja habituado aos cardinais finitos, e somente a eles, parece óbvio que somente podem existir cardinais finitos. Um número cardinal, para essa pessoa, é alcançado por contagem; e a definição apropriada de uma totalidade infinita é uma que é impossível de contar. Isto não é um preconceito estúpido. Os escolásticos favoreceram um argumento para mostrar que a raça humana não podia ter existido sempre, na base que, se tivesse existido, não haveria qualquer número que seria o número de todos os seres humanos que sempre houve, onde para cada conceito tem de existir um número que é o número dos objectos que caem sobre ele. Do mesmo modo, o preconceito é um que pode ser ultrapassado: o aprendiz pode ser persuadido que faz sentido, ao fim ao cabo, falar no número dos números naturais. Assim que este preconceito inicial tiver sido ultrapassado, o próximo passo é convencer o aprendiz que há distintos números cardinais transfinitos: nem todas as totalidades infinitas têm tantos membros que cada uma. Quando ele estiver acostumado a esta ideia, ele muito provavelmente perguntará, "Quantos cardinais transfinitos há?" De que forma deve ser respondido? Muito provavelmente respondem dizendo-lhe, "Não deve colocar essa questão". Mas por que não deve fazê-lo? Se teve, ao fim ao cabo, todo o direito de perguntar, "Quantos números há?", no sentido que "número" significava "cardinal finito", como pode ele estar errado em perguntar a mesma questão quando "número" significa "cardinal finito ou transfinito"? Uma mera proibição deixa a matéria um mistério. Não ajuda dizer que há algumas totalidades tão grandes que nenhum número pode ser atribuído a elas. Podemos ganhar alguma apreensão da ideia de uma totalidade demasiado grande para ser contada, mesmo no nível quando pensamos que, se não pode ser contada, não tem um número; mas, a partir do momento que aceitamos que totalidades demasiado grandes para serem contadas podem, afinal, ter números, a ideia de uma demasiado grande para ter um número não transmite coisa alguma de todo. E meramente dizer, "Se persistes em falar sobre o número de todos os números cardinais, entrarás em contradição", é fazer uma ameaça, não é oferecer uma explicação.

O facto revelado pelos paradoxos da teoria dos conjuntos foi o da existência de conceitos indefinidamente extensíveis – um facto do qual Frege não sonhou e mesmo Cantor apenas teve uma percepção obscura. Um conceito indefinidamente extensível é um conceito tal que, se podemos formar uma concepção definida de uma totalidade cujos todos os seus membros caem sobre esse conceito, podemos, por referência a essa totalidade, caracterizar uma totalidade maior cujos todos os seus membros caem sobre o conceito. O conceito de Russell *classe não membra de si mesma* proporciona um bonito exemplo de um conceito indefinidamente extensível. Suponhamos que tínhamos concebido de uma classe *C* cujos todos os membros caem sobre o conceito. Então isso certamente envolveria uma contradição supor *C* ser membra de si mesma. Assim, considerando a totalidade consistindo nos membros de *C* juntamente com *C* ela mesma, conseguimos especificar uma totalidade mais inclusiva do que *C* cujos todos os seus membros caem sobre o conceito *classe não membra de si mesma*. Podemos dizer, então, que o conceito *classe não membra de si mesma* tem uma extensão? Devemos de facto dizer que, pela natureza do caso, não podemos formar nenhuma concepção da totalidade de todos os objectos que podemos conceber e que devemos reconhecer como caindo sobre esse conceito. Por outro lado, relativamente à questão se é errado supor que cada conceito definido sobre um determinado domínio de objectos distinguíveis tem uma extensão devemos responder, "Certamente, não". Suponha que tivemos sucesso em especificar, ou em claramente conceber, algum domínio determinado de objectos distinguíveis, alguns ou todos os quais são classes, e sobre a qual a relação membro de é bem definida. Então devemos olhá-la como determinada, para um elemento desse domínio, se é ou não uma classe e, caso seja, se é ou não membra de si mesma. Um conceito cuja aplicação a uma totalidade determinada é ela mesma determinada deve distinguir uma subtotalidade determinada de elementos que caem sobre ele; e assim o conceito *classe não membra de si mesma* deve ter uma extensão definida dentro desse domínio. Tudo o que estamos proibidos de supor é que qualquer classe pertencente ao domínio coincide com a extensão desse conceito. O erro de Frege, assim, não consiste em tomar a noção de uma classe, ou, mais exactamente, a sua noção de "value-range" (a extensão de uma função), ser lógica em vez de matemática, como é por vezes dito, nem mesmo num sentido sério, em supor cada função ter uma extensão; consiste na falha em perceber a noção de ser uma extensão indefinidamente, ou, mais geralmente, na falha em não permitir de todo conceitos indefinidamente extensíveis.

(...)

Tradução: Eduardo Castro

---

[*] Dummett, Michael (1994), "What is Mathematics About?", in George, Alexander, *Mathematics and Mind* (Oxford: Oxford University Press), p: 11-26.