Recensão: Colyvan, Mark (2001), *The Indispensability of Mathematics* (Nova Iorque: OUP).

Eduardo Castro

Introdução

Mark Colyvan é um filósofo que tem procurado de modo consistente analisar o problema da aplicabilidade matemática à ciência empírica nomeadamente segundo a vertente do argumento da indispensabilidade de Quine/Putnam. *The Indispensability of Mathematics* é uma tentativa de sistematização e desenvolvimento de teses apresentadas em artigos precedentes em torno do argumento da indispensabilidade como um argumento a favor do realismo matemático. Neste texto procurarei resumir algumas partes do livro criticando pontualmente alguns aspectos.

O livro de Colyvan é formado por sete capítulos. O primeiro capítulo é uma introdução ao argumento da indispensabilidade de Quine/Putnam onde se mostra como são essenciais ao argumento as doutrinas do holismo da confirmação e naturalismo quineano. Os dois capítulos subsequentes são uma defesa dessas doutrinas. Os capítulos quatro, cinco e seis são uma discussão das posições críticas de Hartry Field, Penelope Maddy e anti-empiristas sobre o argumento da indispensabilidade. O último capítulo é a conclusão do livro que dá especial ênfase aos dois problemas clássicos formulados por Paul Benacerraf sobre o platonismo.

Naturalismo e Holismo para a Indispensabilidade

Embora o argumento da indispensabilidade seja atribuído a Quine não existe nos seus escritos uma formulação detalhada desse argumento. O argumento da indispensabilidade apresentado por Colyvan é, assim, uma versão do chamado argumento de Quine/Putnam. Este argumento afirma que (1) devemos comprometermo-nos ontológica e exclusivamente com todas as entidades que são indispensáveis às teorias científicas e (2) dado as entidades matemáticas serem indispensáveis às teorias científicas, (C) logo, devemos comprometermo-nos ontologicamente com as entidades matemáticas. No primeiro capítulo, Colyvan refere que a primeira premissa do argumento é suportada pela doutrina do holismo da confirmação e, principalmente, pela doutrina naturalista quineana.

O capítulo 2, "The Quinean Backdrop", é uma discussão das doutrinas do holismo da confirmação e do naturalismo no sentido de separá-las da restante filosofia de Quine. Segundo Colyvan, o naturalismo quineano é constituído por dois elementos: a tese normativa da rejeição de uma "filosofia primeira" como perspectiva para o conhecimento do mundo que metafisicamente conduz ao comprometimento exclusivo com todas as entidades das nossas teorias científicas; a tese descritiva de que a filosofia é contínua com a ciência e que conjuntamente tentam uma investigação e explicação do mundo. Dada a necessidade da doutrina controversa do holismo semântico quineano para a doutrina do holismo da confirmação quineano, Colyvan defende a versão holista da confirmação proposta por Duhem e Lakatos. Esta versão não recorre a considerações semânticas, afirma simplesmente que face a experiências recalcitrantes é possível preservar o núcleo de uma teoria científica por ajustamentos apropriados de hipóteses auxiliares[1]. Portanto, a doutrina do naturalismo é essencial à primeira premissa, mas dado ser discutível o comprometimento relativamente a algumas entidades constituintes das teorias científicas, a primeira premissa fica mais segura quando suportada também pela doutrina do holismo da confirmação (Duhem/Lakatos), pois esta garante que *toda* a teoria é suportada empiricamente.

O capítulo 3, "The Eleatic Principle", é sobre a versão naturalista, rival ao naturalismo quineano, que defende o princípio – *princípio eleático*[2] – que não devemos comprometermo-nos com entidades à qual não atribuímos poder causal, pois a realidade é unicamente constituída por entidades espácio-temporais. Mais formalmente, uma entidade é considerada como real se, e só se, for capaz de participar em processos causais. Entre realistas é quase consensual que se uma entidade participa num processo causal, então trata-se de uma entidade real. Porém, Colyvan defende que a proposição conversa é falsa, isto é, uma entidade pode ser considerada real e, no entanto, não participar em qualquer processo causal. Se se mostrar que os argumentos a favor do princípio eleático estão errados, então as filosofias da matemática platonistas que consideram as entidades matemáticas como causalmente inertes e reais podem reclamar, via argumento da indispensabilidade, que as entidades matemáticas têm os mesmos direitos ontológicos que as entidades científicas.

Colyvan explana vários argumentos (indutivo, epistémico, explicação causal, relevância causal e inferência para a melhor explicação) que podem suportar o princípio eleático mostrando que todos eles são incorrectos e, portanto, a defesa do naturalismo quineano é pela negativa. Analisemos os três primeiros.

No argumento indutivo toma-se como premissa que a apreensão das coisas (incontroversamente) reais do mundo revela que essas coisas têm poderes causais; por indução, segue-se que todas as entidades reais têm poderes causais. O argumento indutivo é baseado na intuição da causalidade como critério de demarcação entre o real e o instrumental. Porém, este critério de demarcação é problemático, pois existem outras propriedades que as entidades reais partilham e que estão ausentes nas outras entidades. Por exemplo, a propriedade de se localizarem no espaço-tempo, massa em repouso positiva ou cor. Segundo Colyvan uma resolução deste problema consegue-se em assumir que a propriedade da causalidade é (provavelmente) a única propriedade que nos permite aceder epistemicamente às entidades e consequentemente à sua existência. Colyvan passa do argumento indutivo para o argumento epistémico como motivação primeira do princípio eleático.

O argumento epistémico, decorrente de Benacerraf, considera que se existem entidades causalmente inertes, não temos razões para acreditar na sua existência dado que a sua ineficácia causal assegura-nos que não interagirão com nós. Porém, dada a existência de entidades causalmente activas, mas não necessariamente em interacção com nós, por exemplo estrelas e planetas fora do nosso cone de luz, então estas entidades levantam problemas epistémicos idênticos aos problemas epistémicos associados às entidades causalmente inertes. Portanto, à luz do argumento referido não temos razões para acreditar na existência de estrelas e planetas fora do nosso cone de luz. Porém, parece haver aqui uma assimetria entre a epistemologia associada às entidades fora do nosso cone de luz e a epistemologia associada às entidades matemáticas que precisava de ser esclarecida.

O contra-exemplo das entidades fora do nosso cone de luz, dado por Colyvan, é um contra-exemplo problemático nomeadamente com a dimensão física tempo que impossibilita a colocação num mesmo plano epistémico entidades *definitiva* e causalmente inertes (como as matemáticas, para alguns platonistas) e entidades causalmente eficazes que *ainda* não interagiram com nós. As entidades fora do nosso cone de luz são entidades que, decorrido determinado tempo serão entidades do nosso cone de luz. Por exemplo, os fotões emitidos pelo Sol neste instante, alcançarão o planeta Terra ao fim de alguns minutos. Haverá alguma diferença epistémica relevante entre os fotões que neste momento atingem a Terra e aqueles que a atingirão daqui alguns instantes, para além dessa diferença temporal? Se respondermos negativamente (que penso ser a resposta correcta), então as entidades fora do nosso cone de luz estão no mesmo plano epistémico que as entidades do nosso cone de luz. Ou seja, o contra-exemplo das entidades fora do nosso cone de luz é irrelevante para o problema epistemológico de Benacerraf, dado que se mantêm a impossibilidade de colocação, num mesmo plano epistémico, de entidades *definitiva* e causalmente inertes (como as matemáticas, para alguns platonistas) e entidades causalmente eficazes que *ainda* não interagiram connosco mas que potencialmente têm essa possibilidade. O argumento de Benacerraf é um problema para as entidades que não têm propriedades causais em todos os mundos possíveis e não para entidades segundo as quais a propriedade da causalidade é uma possibilidade. Acresce que uma interpretação generosa do princípio eleático considera que devemos somente acreditar em entidades que *potencialmente* tem poderes causais,[3] e esse é o caso das estrelas e planetas fora do nosso cone de luz. O contra-exemplo das entidades fora do nosso cone de luz é um contra-exemplo importante para a sustentação da argumentação de Colyvan e se a impossibilidade acima apontada é correcta, então a sua argumentação fica enfraquecida. No final do capítulo, "The Moral", discute-se uma versão do princípio eleático que aceitaria em termos *ad hoc* determinadas entidades, mas isto não intersecta a fragilidade anterior.

O argumento mais importante para o princípio eleático é o argumento da explicação causal de David Armstrong. Se parece evidente que entidades abstractas não têm qualquer poder causal nem relações causais com entidades reais, então essas entidades não têm poder explicativo e, via navalha de Ockham, devemos rejeitar a sua postulação. Colyvan socorrendo-se de exemplos da história da ciência (curvatura do raio de luz, padrões meteorológicos antipodais e contracção de Lorentz-FitzGerald) mostra que entidades causalmente inertes têm poder explicativo em teorias científicas e, portanto, a sua existência deve ser postulada. Colyvan termina o capítulo 3 com uma discussão das propostas recentes de Mark Balaguer e Jody Azzouni que só indirectamente se referem ao princípio eleático.

Três Críticas à Indispensabilidade (Field, Maddy, e Anti-Empiristas)

O capítulo 4 discute o projecto ficcionista[4] de Hartry Field particularmente defendido em *Science Without Numbers* (1980). A posição de Colyvan é muito próxima da de Field: ambos aceitam como correctas as doutrinas quineanas e acham que o argumento da indispensabilidade é o único bom argumento a favor do platonismo. A discordância entre eles é relativamente à premissa que afirma que a matemática é indispensável às teorias científicas – Colyvan considera-a verdadeira, enquanto Field considera-a falsa.

Dado as entidades matemáticas serem correntemente usadas nas teorias científicas, o ónus da prova está do lado dos nominalistas. A nominalização da teoria gravitacional de Newton é uma tentativa séria de Field mostrar que a matemática é dispensável a essa teoria e que Colyvan resume neste capítulo.

Colyvan julga que a atracção usual pelo projecto de Field reside na falha deste no esclarecimento do conceito dispensabilidade: afinal que significa uma entidade matemática ser dispensável a uma teoria científica? Este esclarecimento remete inevitavelmente para uma teoria da confirmação como um estudo sobre os princípios que regem o raciocínio científico. Para Colyvan uma boa teoria científica para além da adequação empírica e da consistência deve obedecer a mais quatro princípios: simplicidade/parcimónia, unificação/poder explicativo, ousadia/fecundidade e elegância formal. Assim, uma entidade matemática é dispensável a uma teoria científica se a teoria resultante dessa eliminação for uma melhor teoria no sentido dos princípios enunciados. Após este esclarecimento, Colyvan dá três exemplos (números complexos, equação de Dirac e transformações de Lorentz), onde evidencia que as teorias científicas associadas quando nomalizadas ficam "piores" teorias do que as versões matematizadas das respectivas teorias. Porém, a exemplificação não é uma obrigação dos defensores da indispensabilidade, os contra-exemplos devem surgir de quem acha a matemática dispensável às teorias científicas.

O capítulo seguinte discute a crítica de Penelope Maddy sobre as consequências platonistas que geralmente se retiram do argumento da indispensabilidade, pois segundo esta crítica o argumento da indispensabilidade é irrelevante para o debate do realismo vs. anti-realismo acerca das entidades matemáticas.

Colyvan expõe três objecções de Maddy. A primeira objecção defende que os cientistas têm diferentes graus de crença relativamente a determinadas entidades da ciência. Serve como exemplo desse aspecto a discussão sobre o estatuto ontológico do átomo nos primórdios da teoria atómica. Portanto, do facto de determinadas entidades serem indispensáveis a determinadas teorias científicas não se segue direitos ontológicos para essas entidades. A segunda objecção, segue-se da anterior, constata o uso peculiar da matemática nas teorias científicas. A matemática é usada para o estabelecimento de suposições físicas falsas (por exemplo, a hipótese de profundidade infinita na água para a teoria de ondas respectiva) e também por razões de conveniência que desprezam consequências ontológicas que eventualmente podem resultar desse uso (por exemplo, do uso dos números reais em modelos científicos respeitantes ao espaço-tempo não se seguem investigações para determinar características do espaço-tempo como a continuidade ou a densidade). A terceira objecção é, segundo Colyvan, a objecção mais séria à indispensabilidade: a prática matemática evidencia que os matemáticos acreditam nas entidades matemáticas, porque estas derivam de axiomas e não porque sejam aplicadas na ciência empírica; no âmbito da matemática pura verifica-se uma prática matemática que não têm qualquer aplicação matemática à ciência empírica e, dado o naturalismo quineano, não podemos rejeitá-la por justificações não-matemáticas – a determinação da ontologia e características das entidades matemáticas opera-se por critérios matemáticos.

Colyvan rejeita cada uma das objecções defendendo que as duas primeiras objecções são suportadas a partir de uma perspectiva naturalista errada e a última objecção parte de uma confusão acerca do holismo quineano. Colyvan antes de rejeitar cada uma das objecções resume numa secção (secção 5.2) o naturalismo de Maddy evidenciando aspectos confusos da sua formulação. Assim, uma perspectiva naturalista adoptada por Maddy considera que caso haja um conflito entre a prática científica e a filosofia, esta deve desistir das suas posições. A ciência ocupa uma posição privilegiada em relação à filosofia e, desse modo, o filósofo naturalista não pode criticar, por exemplo, as atitudes dos cientistas relativamente à ontologia dos átomos. De acordo com Colyvan esta perspectiva naturalista afasta-se da perspectiva quineana e por conseguinte é uma perspectiva errada. Feita esta elucidação segue-se a rejeição quase imediata das duas primeiras objecções. Finalmente, Colyvan discute a terceira objecção dedicando-lhe mais espaço (6 p.) que as anteriores. No essencial, Colyvan mostra que o argumento da indispensabilidade dá uma descrição mais apropriada da prática matemática na medida que a visão holista de suporte ao argumento concede que (1) a matemática pura seja aplicada (indirectamente) na ciência desde que exista uma cadeia de aplicações ao longo de ramos da matemática que em última instância tem aplicações na ciência; e (2) caso esta condição não se verifique, então a prática da matemática pura é um exercício recreativo sem direitos ontológicos, mas fundamental a qualquer investigação. Comparativamente, os critérios de determinação ontológicos de Maddy são consistentes com a situação absurda de simples pensamentos acerca de entidades matemáticas implicar a sua existência ontológica. Porém, parece haver aqui uma tensão entre os pontos (1) e (2). Os conjuntos de ordem mais elevada têm uma aplicação em conjuntos de ordem menos elevada e estes noutros de ordem ainda menos elevada, e assim sucessivamente. Ou seja, o critério de aplicação matemática feita no interior dos ramos da matemática pode conduzir a um comprometimento com todas as entidades matemáticas e esse comprometimento "total" estará em tensão com o ponto (2). Um esclarecimento do que se considera serem aplicações ao longo dos ramos da matemática poderia aliviar esta tensão.

No seguimento das ideias de Maddy ao nível dos fundamentos da matemática, Solomon Feferman (1993) mostra como o sistema W (assim chamado em homenagem a Hermann Weyl), que é um sistema predicativo redutível à axiomática de Peano, é suficiente para uma formalização directa de quase todas (senão todas) as aplicações matemáticas à ciência empírica e, portanto, as entidades matemáticas além dos números naturais são vistas como entidades teóricas. Esta consideração de Feferman intersecta o argumento da indispensabilidade matemática na medida que lança uma nova luz sobre questões importantes ao argumento como: a) quais as entidades matemáticas que são indispensáveis às teorias científicas actuais; b) quais os princípios relativos a essas entidades são necessários a matemática requerida. Porém, em *The Indispensability of Mathematics* não há qualquer menção a este trabalho ou às suas ideias subjacentes.

O capítulo 6 é uma discussão das posições anti-empiristas relativamente à natureza da matemática. O argumento da indispensabilidade coloca as entidades matemáticas e científicas epistemicamente a par, porém esta situação não parece compatível com a ideia comum que as proposições empíricas são a posteriori, contingentes e revisáveis, enquanto as proposições matemáticas são a priori, necessárias e irrevisáveis. Neste capítulo, Colyvan defende a tese controversa que o conhecimento matemático tem um carácter empírico. Nesse sentido discutem-se três objecções à indispensabilidade: o carácter a priori e óbvio do conhecimento matemático, a diferença modal entre os conhecimentos matemáticos e empíricos (Alan Musgrave) e a diferença justificativa entre as teorias matemáticas e científicas (Elliott Sober). No final do capítulo tenta-se responder à questão "é a matemática contingente?".

Colyvan começa pela crítica que a tese da indispensabilidade assume determinadas proposições matemáticas como verdadeiras devido ao sucesso da sua aplicabilidade em determinadas teorias científicas, não explicando o carácter óbvio da sua verdade independente do sucesso aplicativo. Por paralelismo com o programa nominalista de Field, Colyvan defende que nenhuma proposição é obviamente verdadeira e que o carácter óbvio da sua verdade depende do contexto em que se profere a proposição. Sem qualquer esclarecimento prévio dos conceitos de verdade e existência, Colyvan reclama que uma proposição matemática que não explicite uma quantificação existencial sobre objectos matemáticos, quando considerada superficialmente, afirma que os objectos matemáticos existem, quando considerada não superficialmente, não é obvio a que se refere. Porém, em ambas as situações não é óbvio o carácter verdadeiro da proposição.

Decorrente da crítica anterior do carácter óbvio da matemática, Colyvan discute o significado da afirmação "a matemática é a priori". Nesse sentido esclarece que entende essa afirmação como a tese fraca de que podemos conhecer as proposições matemáticas por meios a priori, distinguindo em seguida três sentidos para a priori. Analisando o exemplo de uma proposição matemática *p*[5] e uma demonstração associada evidente que até um matemático da antiguidade compreenderia, Colyvan defende que vulgarmente se afirma que o conhecimento desta proposição é a priori no sentido que a crença na verdade da proposição é justificada pela compreensão da sua demonstração, porém, isso está errado. A proposição *p* – descontextualizada – não é conhecida a priori e somente *poderá* ser compreendida no contexto. No exemplo em questão, a proposição *p* somente seria compreendida no contexto da teoria de números. Considerando que a teoria de números não é óbvia nem a priori, então a proposição *p* não é conhecida a priori. Como suporte Colyvan sugere a seguinte explicação psicológica. Os axiomas de Peano parecem óbvios e a priori, porque são ensinados num nível escolar em que as intuições sobre a aritmética foram precocemente corrompidas, a um nível escolar inferior, sem qualquer preocupação ontológica; caso imaginássemos a situação de ensinar os axiomas de Peano a alguém adulto, mas "matematicamente analfabeto" constaríamos que eles não são óbvios nem a priori. Esta explicação psicológica é débil: primeiro, confunde o carácter epistemológico (a priori) do conhecimento matemático com o carácter ontológico (existência) das entidades matemáticas; segundo, apela à noção de imaginação que mais à frente é rejeitada – "[i]magination is a very poor guide to what is possible" (p. 123). Neste caso específico, o carácter a priori do conhecimento matemático não é convenientemente rejeitado.

Correntemente, considera-se que no passado nenhuma proposição da matemática pura foi falsificada empiricamente, facto que contrasta com a falsificação inerente às teorias científicas. Por exemplo, a descoberta que o espaço físico não é euclidiano, não resultou de uma falsificação da geometria euclidiana. Concordando com Michael Resnik, Colyvan defende que a geometria euclidiana como teoria do espaço físico foi falsificada, mas como teoria abstracta dos espaços euclidianos se manteve infalsificável, isto acontece, não porque as teorias matemáticas sejam infalsificáveis em sentido absoluto, mas porque a parte matemática das teorias científicas da rede é salvaguardada pelo princípio de mutilação mínima quineano.

Na discussão da objecção de Sober, Colyvan começa por referir o princípio de escolha de teorias adoptado pelo empirismo contrastivo: dada uma observação O, O favorece a hipótese H1 relativamente à hipótese H2 se, e só se, P (O|H1) > P (O|H2). Este princípio é fundamental para uma objecção ao argumento da indispensabilidade, pois se a matemática é confirmada a par das nossa teorias científicas, então, à luz do princípio acima referido, devem existir hipóteses matemáticas que compitam entre si. Porém, não parece plausível uma competição entre hipótese matemáticas; isto é, faz sentido existirem hipóteses alternativas às hipóteses da aritmética? Segundo Colyvan no domínio matemático existem hipóteses alternativas, por exemplo, as formulações alternativas propostas por Frege no domínio da teoria de números e, assim, esta objecção não colhe. Outra objecção decorrente do princípio considera que se existirem hipóteses matemáticas alternativas, então, para uma mesma observação, poderão seguir-se diferentes probabilidades para as hipóteses matemáticas alternativas respectivas? Concordando com Sober, Colyvan pensa que a resposta a esta questão é negativa. Por exemplo, a versão nominalizada da teoria newtoniana proposta por Field não confere probabilidades observacionais diferentes quando comparada com a teoria newtoniana standard. No entanto, para Colyvan a escolha entre teorias efectua-se, não pelo princípio proposto por Sober, mas pelos critérios acima enunciados de elegância, simplicidade, etc. Por último, Colyvan discute as objecções directas ao empirismo contrastivo de Geoffrey Hellman.

Na última secção do capítulo 6 Colyvan tenta defender que a existência das entidades matemáticas é contingente, esta posição chamada contingência do platonismo é tida como a posição mais consistente com o argumento da indispensabilidade. Colyvan resume dois argumentos de Hale e Wright e destaca a posição contingente nominalista de Field que defende não existirem objectos matemáticos, mas isso poderia não ter sido. No essencial, ao longo de cerca de 5 páginas, Colyvan resume a discussão entre Hale/Wright e Field colocando-se do lado deste último dado julgar correcta a condicional que afirma que se os argumentos contra a contingência nominalista forem correctos, então esses argumentos também afectam a contingência platonista.

Último Capítulo

O último capítulo de *The Indispensability of Mathematics* é dedicado a questões segundo as quais o argumento da indispensabilidade não dá resposta e aos problemas clássicos de Benacerraf sobre o platonismo formulados em "What Numbers Could Not Be" (1965) e "Mathematical Truth" (1973).

Dado podermos reduzir toda a matemática à teoria de conjuntos, devemos inferir que as únicas entidades matemáticas que existem são os conjuntos? Quine defende que todas as entidades matemáticas, de uma ou outra forma, são conjuntos. No entanto, as tendências de parcimónia não se seguem do argumento da indispensabilidade e, portanto, da possibilidade redutiva enunciada não se seguem consequências para uma ontologia matemática selectiva. O argumento da indispensabilidade simplesmente afirma que existem objectos matemáticos.

O argumento da indispensabilidade implica que as entidades matemáticas sejam causalmente activas ou causalmente inertes? Colyvan defende um platonismo minimal que somente supõe que as entidades matemáticas existem e que o valor de verdade das proposições matemáticas resulta de propriedades dos objectos matemáticos. Como vimos, Colyvan no capítulo 3 procura dar liberdade aos platonistas de usarem o argumento da indispensabilidade como suporte para a versão platonista que assume as entidades matemáticas como causalmente inertes (e, obviamente, reais). Porém, Colin Cheyne e Charles Pigden defendem que o argumento da indispensabilidade implica que as entidades matemáticas sejam causalmente activas. Colyvan rejeita essa implicação mostrando que a argumentação de Cheyne e Pigden somente é possível supondo que toda a explicação é causal, suposição rejeitada no capítulo 3 através de exemplos de história da ciência onde isso não é o caso. As características causais das entidades matemáticas é uma questão em aberto do argumento da indispensabilidade.

Os problemas de Benacerraf para o platonismo são dois: primeiro, a indeterminação da identificação dos números naturais com os conjuntos; segundo, o problema epistemológico de como é possível o conhecimento de objectos matemáticos que existem, segundo os platonistas, abstracta e independentemente da mente. O primeiro problema leva Benacerraf a concluir que os números não podem ser conjuntos, nem mesmo podem ser objectos desde que se suponha que a aritmética é uma ciência de progressões, um número natural é nada mais que um membro de uma sequência de objectos (estruturalismo), e que nenhum sistema de objectos pode ter somente propriedades estruturais. A conclusão segue-se de pressupostos estruturalistas que segundo Colyvan se se rejeitarem conduzem a uma dissolução do problema. Existem várias interpretações possíveis para o problema epistemológico de Benacerraf, Colyvan pensa que a única interpretação que merece crédito é a interpretação de Field que reclama a necessidade de uma explicação da fiabilidade das nossas crenças nos objectos matemáticos e que, consequentemente, não remete para uma teoria do conhecimento causal. Dada esta interpretação, e via argumento da indispensabilidade, o conhecimento matemático (como as outras formas de conhecimento) é possível pelo método científico hipotético-dedutivo. Saber, a montante, se este método é um mecanismo igualmente fiável é um problema que concerne a todos (platonistas, nominalistas etc.) ou a ninguém.

Agradeço ao Professor Fernando Ferreira os comentários feitos a uma versão anterior do material e a passagem sobre Feferman (1993).

Outras recensões:

Cole, Julian; Shapiro, Stewart (2003), "Review of Colyvan's *The Indispensability of Mathematics*, *Mind* 112: 331-336.

Peressini, Anthony (2003), "Review of Colyvan's *The Indispensability of Mathematics*, *Philosophia Mathematica* 11: 208-223.

Referências:

Benacerraf, Paul (1965), "What Numbers Could Not Be" reimpresso em Benacerraf; Putnam (1983), *Philosophy of Mathematics*, (Cambridge: CUP), p: 272-94.

Benacerraf, Paul (1973), "Mathematical Truth", reimpresso em Benacerraf; Putnam (1983), Philosophy of Mathematics, (Cambridge: CUP), p: 403-20.

Colyvan, Mark (2001), *The Indispensability of Mathematics*, (Nova Iorque: OUP).

Feferman, Solomon (1993), "Why a Little Bit Goes a Long Way: Logical Foundations of Scientifically Applicable Mathematics" reimpresso em Feferman (1998), *In the Light of Logic*, (Nova Iorque: OUP), p: 284-98.

Field, Hartry (1980), *Science Without Numbers: A Defence of Nominalism*, (Oxford: Blackwell).

[1] Caso queiramos rejeitar o holismo da confirmação teremos então que proceder a uma separação do vocabulário matemático do vocabulário empírico.

[2] Chamado assim em virtude de uma passagem no *Sofista* de Platão que afirma o poder causal como uma propriedade do ser.

[3] Colyvan (2001), p: 32.

[4] Grosseiramente um ficcionista acredita que as proposições matemáticas são, em grande medida, falsas, mas que no contexto matemático são ficções verdadeiras. Comparativamente com a ficção literária a proposição "Fausto era um alquimista" é falsa, mas "verdadeira na obra de Goethe".

[5] $\sum (2j - 1) = n^2 : j = 1, \ldots, n$.